Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas II (MA1112)
1er Examen Parcial (26 %)
Ene-Mar 2018

Turno 1-2
Duración: 1 hora 50 minutos

Respuestas

Pregunta 1. Sea $f(x) = \frac{2}{5}x + 2$ definida en el intervalo $[-4, 0]$.

a. (4 ptos.) Halle la suma de Riemann de la función $f(x)$ para la partición $\mathcal{P} = \{-4, -3, -3/2, -1, 0\}$ del intervalo $[-4, 0]$ y los puntos muestra definidos como $\bar{x}_i = 0{,}2x_i + 0{,}8x_{i-1}$ en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$

b. (8 ptos.) Determine $\int_{-4}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ mediante sumas de Riemann empleando una partición uniforme.

Solución:

a) Los puntos muestra son $\{-19/5, -27/10, -7/5, -4/5\}$. Luego, la suma de Riemann correspondiente es,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i &= f(-19/5)\,1 + f(-27/10)\,3/2 + f(-7/5)\,1/2 + f(-4/5)\,1\\ &= 213/50\end{aligned}$$

b) Considerando una partición uniforme del intervalo $[-4, 0]$, tenemos que $\Delta x_i = 4/n$ y $x_i = -4 + \frac{4}{n}i$ con $i \in \{0, \ldots, n\}$. Podemos tomar como punto muestra el extremo de la derecha en cada subintervalo; así, $\bar{x}_i = x_i \in [x_{i-1}, x_i]$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Luego, la suma de Riemann correspondiente es,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n} f\left(-4 + \frac{4}{n}i\right)\frac{4}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{5} - \frac{8}{5n}i\right)\frac{4}{n}\\ &= \frac{8}{5n}\sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{32}{5n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{8}{5n}n - \frac{32}{5n^2}\frac{n(n+1)}{2}\\ &= \frac{8}{5} - \frac{16}{5}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Como la partición es uniforme, hacer su norma tender a cero es equivalente a hacer el número de subintervalos tender a infinito. Entonces,

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\bar{x}_i\right) \Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\bar{x}_i\right) \Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{8}{5} - \frac{16}{5}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = -8/5$$

y, dado que el límite existe, se tiene que $\displaystyle\int_{-4}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -8/5$.

Pregunta 2. (4 ptos. c/u) Resuelva las integrales

a) $\displaystyle\int \frac{2+\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int \frac{2+\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}\,\mathrm{d}x &= 2\int \csc^2(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= -2\operatorname{cotan}(x) + \int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= -2\operatorname{cotan}(x) + \underset{\substack{\uparrow \\ u=\operatorname{sen}(x) \\ \mathrm{d}u=\cos(x)\,\mathrm{d}x}}{\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2}} \\
&= -2\operatorname{cotan}(x) - \frac{1}{u} + C \\
&= -2\operatorname{cotan}(x) - \csc(x) + C
\end{aligned}$$

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}} = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{1-\left(x/2\right)^2}} \underset{\substack{\uparrow \\ u = x/2 \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x/2}}{=} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\sqrt{2} \Rightarrow u = 1/\sqrt{2} \\ x = 0 \Rightarrow u = 0 \end{array}\right.$$

$$= \arcsen(u)\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \pi/4 - 0 = \pi/4$$

Pregunta 3. (2 ptos.) Determine el intervalo para que la función

$$f(x) = 3x^4 - \int_0^x \left(8t^3 - 3t^2 + 6t\right) \mathrm{d}t$$

sea cóncava hacia arriba.

Solución: El Teorema Fundamental del Cálculo establece que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_0^x \left(8t^3 - 3t^2 + 6t\right) \mathrm{d}t = 8x^3 - 3x^2 + 6x$$

por lo que $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x$ y $f''(x) = 6(x+1)(2x-1)$. Así, la función es cóncava hacia arriba en los intervalos $(-\infty, -1]$ y $\left[1/2, \infty\right)$ ya que $f''(x) > 0$ si, y sólo si, $x \in \left(-\infty, -1\right) \cup \left(1/2, \infty\right)$ y su dominio es todo $\mathbb{R}$.

Pregunta 4. (4 ptos.) Demuestre que $-3 \leq \displaystyle\int_{-1}^{2} \left(3x^4 - 4x^3\right) \mathrm{d}x \leq 48$

Solución: Consideremos la función $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ con dominio $[-1, 2]$. Dado que $f'(x) = 12x^2(x-1)$, los puntos críticos son $\{-1, 0, 1, 2\}$. Como $f(-1) = 7$, $f(0) = 0$, $f(1) = -1$ y $f(2) = 16$, tenemos que

$$-1 \leq 3x^4 - 4x^3 \leq 16 \qquad \text{para todo } x \in [-1, 2].$$

Así, usando la Propiedad de Acotamiento, se obtiene que

$$-3 = -1\big(2 - (-1)\big) \leq \int_{-1}^{2} \left(3x^4 - 4x^3\right) \mathrm{d}x \leq 16\big(2 - (-1)\big) = 48.$$